Encontro Nacional da Sociedade Portuguesa de Matemática
25 a 28 de Junho de 2008
ISEC

Álgebra

Org. Pedro V. Silva

26 de Junho, 5ª feira, 11h-12h30

- Alfredo Costa: *Aplicação de categorias pequenas com um número infinito de vértices no cálculo de subgrupos maximais do semigrupo profinito livre*
- Paula Carvalho: *Automorfismos de álgebras Down-Up generalizadas*
- Paula Catarino: *Semigrupos de transformações D_n-normais*

27 de Junho, 6ª feira, 11h-12h30m

- Carlos M. da Fonseca: *Uma desigualdade envolvendo multiplicidades de valores próprios*
- Ana Paula Lopes, Ana Júlia Viamonte e António José Pascoal: *Algoritmo de Lanczos na Variedade de Grassmann*
- Alexander Kovacec e Maria Celeste Gouveia: *Hankel Pencil Conjecture*

28 de Junho, Sábado, 11h-12h30

- Marija Dodig: *Completamento de uma matriz quadrada com uma submatriz prescrita*
- Carla Fidalgo: *A Regra dos Sinais de Descartes e seus refinamentos*
- Maria da Graça Marques: *Teoria Qualitativa de Matrizes: comutatividade de padrões de matrizes*

Automorfismos de Álgebras Down-Up generalizadas

Paula Carvalho[1]

Departamento de Matemática Pura, Universidade do Porto

Resumo

Cassidy e Shelton introduziram uma nova classe de álgebras, as álgebras Down-Up generalizadas (2004, *J. Algebra* **279**, 402-421). As álgebras Down-Up generalizadas incluem, entre outras, todas as álgebras Down-Up introduzidas por Benkart e Roby em 1998 e as álgebras semelhantes às álgebras envolventes de sl_2 definidas e estudas por P.Smith em 1990.

Dado um corpo K, $f \in K[x]$ e r, s, γ elementos arbitrários de K, à álgebra associativa $L(f, r, s, \gamma)$ sobre K com geradores d, u, h sujeitos às relações

$$dh - rhd + \gamma d = 0$$

$$hu - ruh + \gamma u = 0$$

$$du - sud + f(h) = 0$$

damos o nome de álgebra Down-Up generalizada. A álgebra $L(f, r, s, \gamma)$ diz-se conformal se existir um polinómio $g(x) \in K[x]$ tal que $f(x) = sg(x) - g(rx - \gamma)$.

O grupo de automorfismos de $L(f, r, s, \gamma)$ será descrito quando a álgebra Down-Up generalizada é Noetheriana e conformal e r não é raiz da unidade. Obter-se-à também uma descrição do grupo de automorfismos de todas as álgebras Down-Up Noetherianas em que algum dos parâmetros r ou s não é raiz da unidade.

[1]Trabalho conjunto com Samuel Lopes

SEMIGRUPOS DE TRANSFORMAÇÕES D_n-NORMAIS

Paula Catarino
Departamento de Matemática, Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro
UIMA - Unidade de Investigação, Matemática e Aplicações da Universidade de Aveiro

Resumo

Dado um subgrupo G do grupo simétrico S_n, um semigrupo S de transformações de $X_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ em si próprio(semigrupo de transformações totais de X_n) diz-se G-normal se $G_S = G$, onde G_S é o grupo de todas as permutações $h \in S_n$ tais que $h^{-1}fh \in S$ para todo o $f \in S$.

Em 1996, I. Levi, em [2], mostrou que o grupo alternante A_n não serve como grupo G_S para qualquer tipo de semigrupo de transformações totais de X_n. Em 2000 e 2001, I. Levi, D. B. McAlister e R. B. McFadden, em [3] e [4], estudaram todos os semigrupos A_n-normais de transformações parciais de X_n. Também, em 1994, I. Levi e R. B. McFadden, em [1], descreveram todos os semigrupos S_n-normais.

Em 2008, P. Catarino e I. Levi, em [5], continuaram este estudo. Nesta comunicação, mostraremos que o grupo diedral D_n serve como grupo G_S para alguns semigrupos de transformações totais de X_n.

Referências

[1] 24. I. Levi, R. B. McFadden, S_n-normal semigroups, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, **37**, (1994), 471-476.

[2] I. Levi, On the inner automorphisms of finite transformation semigroups, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, **39**,(1996), 27-30.

[3] I. Levi, D.B. McAlister, R.B. McFadden, Groups associated with finite transformation semigroups, *Semigroup Forum*, Vol. **61**, (2000), 453-467.

[4] I. Levi, D.B. McAlister, R.B.McFadden, A_n-normal Semigroups, *Semigroup Forum*, Vol **62**, (2001), 173-177.

[5] Paula Catarino, Inessa Levi, D_n-normal semigroups of transformations, *Semigroup Forum*, Vol. **76**, (2008), 368-378.

Aplicação de categorias pequenas com um número infinito de vértices no cálculo de subgrupos maximais do semigrupo profinito livre

Alfredo Costa[1]

CMUC, Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra

Resumo

Desde meados dos anos 80, constata-se que na teoria de semigrupos finitos é de grande importância a consideração de categorias pequenas enquanto álgebras parciais que generalizam os monóides. Neste contexto, fazemos pela primeira vez uma utilização correcta de categorias com um número infinito de vértices. Nomeadamente, interpretando palavras de retorno generalizadas de sistemas dinâmicos simbólicos minimais como lacetes de grafos de Rauzy, calculamos certas classes de subgrupos maximais do semigrupo profinito livre.

[1] Trabalho conjunto com Jorge Almeida

Completamento de uma matriz quadrada com uma submatriz prescrita

Marija Dodig

Centro de Estruturas Lineares e Combinatórias, Universidade de Lisboa

Resumo

Nesta palestra, vamos mostrar a solução completa do problema do completamento de uma matriz quadrada cuja classe de semelhança é uma submatriz arbitrária prescrita, sobre corpos algebricamente fechados. As condições necessárias e suficientes obtidas são simples e explícitas, e generalizam a maioria dos resultados prévios na teoria dos completamentos de matrizes. Os métodos utilizados incluem os resultados prévios da autora sobre os completamentos dos feixes de matrizes, a solução do problema de Carlson, as técnicas de localização e os coeficientes de Littlewood-Richardson.

A Regra dos Sinais de Descartes e seus refinamentos

Carla Fidalgo

Departamento de Física e Matemática, Instituto Superior de Engenharia de Coimbra

Resumo

A Regra dos Sinais de Descartes clássica, data de 1637 e, diz-nos que se um polinómio real $f(x)$ tem na sucessão dos seus coeficientes v trocas de sinal então tem no máximo v raízes reais positivas. Embora intuitiva e credível só quase um século depois, 1728, é que foi conseguida a primeira prova rigorosa que se deve a Segner. Mais, a primeira prova "elementar" foi conseguida por Gauss já em 1828.

Refinamentos e extensões desta Regra têm sido feitos dos mais variados modos, por famosos matemáticos como Pólya, Laguerre entre outros, e ainda hoje continua a ser de grande interesse nas áreas de matemática e de ciências de computação ("isolation of the real roots of polynomial equations", "polynomial real rootfinding algorithms",...).

Jacobi deu-nos transformações que permitem usar a Regra de Descartes para estimar o número de raízes num dado intervalo.

Refira-se por exemplo que uma grande parte das numerosas e importantes contribuições de Laguerre para a teoria das equações algébricas baseia-se na Regra dos Sinais de Descartes. Em particular Laguerre provou que para k suficientemente grande, o número de mudanças de sinal dos coeficientes de $e^{kx}f(x)$ é exactamente igual ao número de raízes positivas de $f(x)$. Laguerre observou também que uma majoração possível (e não superior à obtida pela Regra de Descartes) para o número de zeros no intervalo (0, 1) consiste no número de mudanças de sinal da sucessão das somas parciais dos coeficientes do polinómio $f(x)$.

Fekete e Pólya mostraram que a Regra dos Sinais aplicada à série de potências de $f(x)/(1-x)^k$, com k suficientemente grande, dá-nos o número exacto de raízes no intervalo $[0,1]$, resultado que se pode adaptar de modo a ser aplicado a $[0,+\infty)$. Mais referiram que o número exacto de raízes reais positivas pode ser obtido por multiplicação do polinómio real $f(x)$ por $(1+x)^k$ com k suficientemente grande.

Uma ideia semelhante foi-nos dada por Curtiss que provou que dado um qualquer polinómio real $f(x)$ existe um polinómio $f_1(x)$, que pode ser escolhido com todos os coeficientes positivos, tal que o número de mudanças de sinal nos coeficientes de $f_1(x)f(x)$ é exactamente igual ao número de raízes positivas de $f(x)$. Chamamos multiplicadores Cartesianos aos polinómios $f_1(x)$ que verificam esta propriedade. O interesse consiste em descobrir os melhores, os mais eficientes. Existem métodos que nos permitem obter um limite superior para o grau do multiplicador, em termos dos coeficientes do polinómio, mas em casos particulares são conhecidos multiplicadores com graus muito inferiores aos obtidos por estes métodos, o que mostra que ainda há muito por descobrir.

Outra abordagem foi feita por Budan e Fourier que provaram que dado um polinómio real $f(x)$ se $V(x)$ simbolizar o número de mudanças de sinal da sucessão $f(x)$,$f'(x)$,$f''(x)$,$\ldots$,$f^{(n)}(x)$ então o número de raízes no intervalo (a,b) (atendendo à multiplicidade) é não superior a $V(a)-V(b)$.

Se estivermos interessados no número exacto de raízes distintas de um polinómio real num dado intervalo aberto devemos usar o Teorema de Sturm, mas embora a Regra de Descartes nos dê apenas uma majoração para o número de raízes tem a vantagem de permitir o tratamento de famílias de equações algébricas.

Com esta comunicação pretendo fazer um apanhado dos resultados referidos, que me têm sido úteis, e alguns deles estiveram "esquecidos" durante dezenas de anos, e apresentar a aplicação destes resultados a uma parte do meu actual trabalho de investigação.

Uma desigualdade envolvendo multiplicidades de valores próprios

Carlos M. da Fonseca

CMUC, Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra

Resumo

Seja $A(G)$ uma matriz simétrica cujo grafo é G. Pelo teorema de entrelaçamento, é conhecido que $m_{A(G\setminus i)}(\theta) \geq m_{A(G)}(\theta) - 1$, onde $m_{A(G)}(\theta)$ representa a multiplicidade algébrica do valor próprio θ de $A(G)$. Utilizando a Identidade de Christoffel-Darboux, estabeleceremos uma desigualdade análoga quando um determinado caminho é eliminado de G.

The Hankel Pencil Conjecture

Alexander Kovacec[a], Maria Celeste Gouveia[a]

[a]Departamento de Mathemática, Universidade de Coimbra

Resumo

Consider the specific Hankel matrices over $\mathbb{C}[x]$, defined by

$$H_n(x) = H_n(x; c_1, \ldots, c_{n+1}) = \begin{bmatrix} & & & x & c_1 & c_2 \\ & & x & c_1 & c_2 & c_3 \\ & & & & \vdots & \vdots \\ x & c_1 & \ldots & \ldots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ c_1 & c_2 & \ldots & \ldots & c_{n-1} & c_n \\ c_2 & c_3 & \ldots & \ldots & c_n & c_{n+1} \end{bmatrix};$$

for example

$$H_5(x) = \begin{bmatrix} & & x & c_1 & c_2 \\ & x & c_1 & c_2 & c_3 \\ x & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \end{bmatrix}.$$

The conjecture we address in this talk reads as follows:

Conjecture 1.1. (Hankel Pencil Conjecture HPnC). *If* $\det H_n(x) = 0$, *and* $c_1, ..., c_n \in C^*$, *then the last two columns are dependent.*

This conjecture was put forth in a 2004 article by Schmale and Sharma who showed that its truth would imply considerable progress for a 1981 conjecture in control theory by Bumby, Sontag, Sussmann, and Vasconcelos, which says that the polynomial ring $\mathbb{C}[y]$ is a so called Feedback Cyclization Ring; but details on this lie outside the scope of this talk.

Schmale and Sharma proved the Hankel Pencil Conjecture for the cases $n = 3, 4$, and by computational algebraic geometry also for $n = 5$; i.e. they proved HP3C, HP4C, HP5C. They had posed HPnC as a problem also in IMAGE, the newsletter of the International Linear Algebra Society, in April 2003. Three years later a solution was proposed, but it was shown by Wimmer to have a serious gap.

We report progress. The main results are:

a) a reduction of the problem to the case where $c_1 = c_2 = 1$ using a general lemma on homogeneous polynomials in n variables which have the additional property of being index sum homogeneous.

b) an equivalent formulation of HPnC using the Sylvester identity for matrices.

c) formulation of a conjecture of ours we call root-conjecture RnC. It says that for certain pairs of polynomials $m_{nn}, m_{n-1,n} \in \mathbb{C}[x]$ (occurring as minors of $H_n(x)$), that $\text{roots}(m_{nn}) \subseteq \text{roots}(m_{n-1,n})$ implies $\text{roots}(m_{n-1,n}) = \{1\}$.

d) Proof of that the root conjecture RnC implies HPnC for each $n \geq 3$.

e) Proof of R3C, R4C, R5C and (with patience) R6C by hand, and R7C, R8C by means of Groebner bases and an (old) 486 PC.

Algoritmo de Lanczos na Variedade de Grassmann

Ana Paula Lopes[1], **Ana Júlia Viamonte**[2] **e António José Pascoal**[2]
[1]ISCAP - IPP

[2]Universidade Portucalense, Porto

Resumo

O problema do cálculo de valores próprios, vectores próprios e subespaços invariantes está presente em áreas tão diversas como Engenharia, Física, Ciências de Computação e Matemática. Considerando a importância deste problema em tantas aplicações práticas, não é de surpreender que tenha sido e continue a ser objecto de intensa investigação, dando corpo a uma literatura muito vasta. Desenvolvemos um novo algoritmo de Lanczos na variedade de Grassmann. Este trabalho surgiu na sequência de um artigo de A. Edelman, T. A. Arias and S. T. Smith, The geometry of algorithms with orthogonality constraints, onde apresentam um novo algoritmo do gradiente conjugado na variedade de Grassmann. Desenvolveram um enquadramento geométrico o que ofereceu uma nova aproximação aos algoritmos numéricos envolvendo restrições de ortogonalidade. Ora, estando o método de Lanczos e o método dos gradientes conjugados intimamente relacionados, e sendo um dos principais problemas do método de Lanczos a perda de ortogonalidade, surgiu a ideia de tentar verificar se algum dos algoritmos de Lanczos seria uma iteração na variedade de Grassmann.

Teoria Qualitativa de Matrizes: comutatividade de padrões de matrizes

Maria da Graça Marques
Centro de Estruturas Lineares e Combinatórias
Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade do Algarve

Resumo

Na teoria qualitativa de matrizes estudam-se matrizes das quais se conhece apenas o posicionamento das entradas nulas e não nulas ou, no caso de matrizes reais, o posicionamento das entradas positivas, negativas e nulas. Este estudo é importante sempre que não seja possível quantificar as entradas de uma matriz e se pretenda analisar propriedades que determinados padrões das entradas da matriz permitem ou requerem. As questões levantadas em teoria qualitativa de matrizes são, geralmente, muito fáceis de enunciar mas difíceis de resolver pela pouca informação de que se dispõe.

Por padrão $\mathcal{P}$ entende-se uma matriz com entradas no conjunto $\{*, 0\}$ e por padrão de sinais $\mathcal{S}$ uma matriz com entradas em $\{0, +, -\}$. Uma matriz tem padrão $\mathcal{P}$ se é do mesmo tipo que $\mathcal{P}$ e as sua entradas não nulas estão exactamente nas entradas $*$ do padrão. Analogamente uma matriz real tem padrão de sinais $\mathcal{S}$ se as suas entradas positivas e negativas estão exactamente nas posições $+$ e $-$ de $\mathcal{S}$. Dois padrões de ordem n, $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, comutam (ou permitem comutatividade) se existem matrizes A e B com padrões, respectivamente, $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ que comutam.

Nesta comunicação, além de uma pequena introdução a propriedades qualitativas das matrizes, apresentamos algumas condições para a comutatividade de padrões arbitrários com o padrão completo, isto é, o padrão sem entradas nulas.