Encontro Nacional da Sociedade Portuguesa de Matemática
25 a 28 de Junho de 2008
ISEC

Geometria e Topologia

Org. Lucile Vandembroucq

26 de Junho, 5ª feira, 11h-12h30

– João Paulo Santos: *Instantons on connected sums: the large rank limit*

– André Gama Oliveira: *Representações do grupo fundamental de uma superfície em* $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{R})$

– Sean Lawton: *On the topology of the moduli of free group representations*

27 de Junho, 6ª feira, 11h-12h30m

– Michael Paluch: *Teoria de homotopia-*$\mathbb{A}^1$ *e enriquecidos simpliciais*

– Pedro F. dos Santos: *A model for equivariant Eilenberg-Mac Lane spectra*

– António Salgueiro: *Coberturas ramificadas sobre enlaces*

27 de Junho, 6ª feira, 14h-15h30m

– Marina Logares: *A Torelli type theorem for the moduli space of parabolic Higgs bundles*

– Carlos Rito: *Involuções em superfícies com* $p_g = q = 1$

– Rui Albuquerque: *Invariantes escalares de torsões simplécticas*

28 de Junho, Sábado, 11h-12h30

– Antonio de Nicola: *The geometry of a 3-quasi-Sasakian manifold*

– Helena Sousa Melo: *Origami Topológico*

– Rui Pacheco: *Pontos e rectas notáveis associados a três circunferências*

Invariantes escalares de torsões simplécticas

Rui Albuquerque

Universidade de Évora

Resumo

No intuito de vir a entender as propriedades das variedades suaves, munidas de uma 2-forma não degenerada ω e de uma conexão ∇ tal que $\nabla\omega = 0$, recordamos o estudo dos invariantes característicos, introduzido por A. Weyl e S. Chern, que se obtêm por meio de tensores como os de curvatura. No presente caso, provando-se existir sempre uma conexão quase-simpléctica e, em particular, uma de tal forma que $\underline{T}^\nabla = \frac{1}{3}\,dx\omega$, importa descobrir que invariantes escalares sob o grupo $Sp(2n,\mathbb{R})$ admitem, quais destes são independentes da conexão, que propriedades revelam da variedade inicial e que exemplos podemos dar. Debruçamo-nos sobre o caso dos invariantes quadráticos da torsão.

On the topology of the moduli of free group representations.

Sean Lawton

Instituto Superior Técnico

Abstract

Let G be a complex affine reductive group and let K be a maximal compact subgroup. We have recently shown the moduli space of representations $X_r(G) = \mathrm{Hom}(F_r, G)/\!\!/G$ is homotopy equivalent to the quotient space $X_r(K) = \mathrm{Hom}(F_r, K)/K$ for any rank r free group F_r. With respect to natural choices, we can further show there is a strong deformation retraction of $X_r(G)$ to $X_r(K)$. In this talk we discuss this theorem and some examples. This reflects collaborative work with Carlos Florentino.

A Torelli type theorem for the moduli space of parabolic Higgs bundles

Marina Logares

Departamento de Matemática Pura, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Abstract

Let X and X' be a smooth projective curves over the complex numbers, the classical Torelli theorem says that the Jacobian J(X) together with the polarization given by the theta divisor determines the curve X, i.e. if $J(X)$ and $J(X')$ are isomorphic as polarized abelian varieties then X and X' are also isomorphic.

A similar result holds for the moduli spaces of parabolic bundles (V. Balaji, I. Biswas, S. del Baño). That is, given a finite subset S of X, and fixing a numerical data, known as parabolic structure, denote M (resp. M') the moduli space of parabolic semi-stable bundles with that fixed parabolic structure on S in X , then M and M' are isomorphic if and only if there is an isomorphism between X and X' which takes S to S'. We will deal with the same problem for parabolic Higgs bundles, i.e.Higgs bundles with a parabolic structure. This is joint work with T. Go'mez.

Origami Topológico

Helena Sousa Melo

Departamento de Matemática, Universidade dos Açores

Resumo

Este trabalho, inspirado no teorema das quatro cores e no modo popular de como a topologia é chamada - geometria da folha de borracha, pretende explorar as possibilidades do uso de cores nas arestas dos sólidos platónicos e arquimedianos, de modo que as arestas de cada face, poligonal de ordem ímpar, possuam cores distintas.
Para tal utilizamos diagramas de origami modular, que nesta perspectiva se comportam como grafos planares conexos, transmitindo a informação desejada através do uso de cores em suas arestas. De certa forma a transformação do grafo planar conexo (diagrama) no sólido tridimensional é uma transformação topológica, visto que preserva, qualitativamente, todas as propriedades existentes.
A exploração das estruturas geométricas pela cor é um bom modo de entendermos uma estrutura tridimensional.

Referências

[1] P.J. Davis e R. Hersh, *A Experiência Matemática*, Ciência Aberta, Gradiva, Portugal, (1995).

[2] D.W. Farmer e T.B. Stanford, *Nós e Superfícies*, O prazer da matemática, Gradiva, Portugal, (2003).

[3] E.R. Scheinerman, *Matemática Discreta - Uma Introdução*, tradução técnica de A.A. de Farias, Thomson, Brasil, (2003).

[4] H. Thomas, Unit origami as graph theory, *Proceedings of the Second International Conference on Origami in Education and Therapy (COET95)*, V. Cornelius ed., Origami USA, New York (1995), 39-48.

The geometry of a 3-quasi-Sasakian manifold

Antonio De Nicola

CMUC, Department of Mathematics, University of Coimbra

Abstract

In the talk I will present some of the main results of our systematic study [1, 2] of 3-quasi-Sasakian manifolds. This class includes as special cases the 3-cosymplectic and the 3-Sasakian manifolds. A 3-*quasi-Sasakian manifold* is an almost 3-contact metric manifold $(M, \phi_\alpha, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$ such that each fundamental 2-form Φ_α is closed and each almost contact structure $(\phi_\alpha, \xi_\alpha, \eta_\alpha)$ is normal. Firstly, we prove that the distribution spanned by the three characteristic vector fields ξ_1, ξ_2, ξ_3 is involutive and defines a 3-dimensional Riemannian and totally geodesic foliation $\mathscr{V}$ of M. Then, taking into account the geometry of $\mathscr{V}$ we show that 3-quasi-Sasakian manifolds divide into two classes: those manifolds for which the foliation $\mathscr{V}$ has locally the structure of an abelian Lie group, and those for which $\mathscr{V}$ has locally the structure of the Lie group $SO(3)$ (or $SU(2)$). For a 3-quasi-Sasakian manifold one can consider the ranks of the three structures $(\phi_\alpha, \xi_\alpha, \eta_\alpha, g)$. We prove that these ranks coincide, allowing us to classify 3-quasi-Sasakian manifolds according to their well-defined rank, which is of the form $4l + 1$ in the abelian case and $4l + 3$ in the non-abelian one. Furthermore, we prove a splitting theorem for any 3-quasi-Sasakian manifold M of constant rank. If M has rank $4l+3$, then it is locally the product of a 3-α-Sasakian and a hyper-Kählerian manifold, whereas if M has rank $4l + 1$, then it is 3-cosymplectic.

Referências

[1] B. Cappelletti Montano, A. De Nicola, G. Dileo, 3-*quasi-Sasakian manifolds*, Ann. Glob. Anal. Geom. (2007), *in press*, [arXiv:0706.1438].

[2] B. Cappelletti Montano, A. De Nicola, G. Dileo, *The geometry of a* 3-*quasi-Sasakian manifold*, 2008, submitted [preprint DMUC 07-38, arXiv:0801.1818].

Representações do grupo fundamental de uma superfície em $\mathrm{PGL}(n,\mathbb{R})$

André Gama Oliveira

Departamento de Matemática da UTAD, aluno de Doutoramento na FCUP

Resumo

Seja X uma superfície fechada e orientada, de género $g \geq 2$. Seja

$$\mathscr{R}_{\mathrm{PGL}(n,\mathbb{R})} = \mathrm{Hom}^{+}(\pi_1 X, \mathrm{PGL}(n,\mathbb{R}))/\mathrm{PGL}(n,\mathbb{R})$$

o espaço das classes de representações redutivas do grupo fundamental de X, $\pi_1 X$, no grupo projectivo geral linear real, $\mathrm{PGL}(n,\mathbb{R})$. Usando a teoria geral de fibrados de Higgs sobre X, vamos ver como se pode estudar o número de componentes conexas de $\mathscr{R}_{\mathrm{PGL}(n,\mathbb{R})}$.

Pontos e rectas notáveis associados a três circunferências

Rui Pacheco[1]

Departamento de Matemática, Universidade da Beira Interior

Resumo

No artigo *An Application of Desargues' Theorem* (Mathematics Magazine, Vol. 55, No. 4, Spet. 1982, 233-235) de J. McCleary, o autor dá uma prova do Teorema das Três Circunferências usando um dos mais famosos teoremas de Geometria Projectiva. Dando continuidade a esta ideia, o principal objectivo da presente comunicação consiste em apresentar a construção de alguns pontos e rectas notáveis associados a uma configuração de três circunferências com centros não colineares usando os métodos sintéticos da Geometria Projectiva.

[1]Em colaboração com o aluno Frederico Pinheiro.
Alguns dos resultados que pretendemos aqui apresentar foram recentemente aceites para publicação na revista *Forum Geometricorum*.

Teoria de homotopia-$\mathbb{A}^1$ e enriquecidos simpliciais

M. Paluch

Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa

Resumo

Designa-se por $\mathbf{V}_0$ a categoria de variedades algébricas complexas munida com a topologia Nisnevich e por $\mathbf{S}_0$ a categoria de conjuntos simpliciais. Um pre-feixe simplicial sobre $\mathbf{V}_0$ é um functor $\mathscr{X}\colon \mathbf{V}_0^{\mathrm{op}} \to \mathbf{S}_0$, e uma aplicação de pre-feixes simpliciais é uma transformação natural $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$. Designa-se por $\mathbf{S}$-*Preshv*$(\mathbf{V}_0)$ a categoria de pre-feixes simpliciais sobre $\mathbf{V}_0$. A teoria de homotopia-$\mathbb{A}^1$ de Morel e Veovodsky, que se designa por $\mathbf{HoS}$-*Preshv*$(\mathbf{V}_0)$, é a localização à esquerda de Bousfield de $\mathbf{S}$-*Preshv*$(\mathbf{V}_0)$ pela colecção de aplicações $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ tais que, para cada fibra p de $\mathbf{V}_0$ a aplicação $f_p\colon \mathscr{X}_p \to \mathscr{Y}_p \in \mathbf{S}_0$ é uma equivalência fraca e de aplicações $i_0\colon \mathscr{X} \to \mathscr{X} \times \mathbb{A}^1$ para cada $\mathscr{X} \in \mathbf{S}$-*Preshv*$(\mathbf{V}_0)$. Aqui $\mathbb{A}^1$ é o pre-feixe representado pela recta afim, e i_0 é a aplicação induzida pela inclusão da origem.

Para cada n um inteiro não-negativo, seja $\Delta^n_{\mathrm{alg}} = \mathrm{Spec}\mathbb{C}[X_0, \ldots X_n]/(1-\sum X_i)$. O objecto co-simplicial $\Delta^\bullet_{\mathrm{alg}}$ dá a $\mathbf{V}_0$ uma estrutura enriquecida sobre $\mathbf{S}$ da forma: Para $X, Y \in \mathbf{V}_0$, o complexo simplicial de aplicações de X em Y é

$$\mathrm{map}(X,Y)_n = \mathrm{Hom}(X \times \Delta^n_{\mathrm{alg}}, Y)$$

Designa-se por $\mathbf{V}$ a categoria simplicial, i.e., com o enriquecimento acima, e designa-se por $\mathbf{S}$-*Preshv*$(\mathbf{V})$ a categoria de functores simpliciais $\mathscr{X}\colon \mathbf{V}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{S}$, em que $\mathbf{S}$ é a categoria simplicial de conjuntos simpliciais munida com os complexos de aplicações usuais.

Teorema 1. *A categoria* $\mathbf{S}$-*Preshv*$(\mathbf{V})$ *possui uma estrutura de uma categoria modelo de Quillen em que as cofibrações são aplicações injectivos e as equivalências fracas são aplicações* $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ *tais que* f_p *é uma equivalência fraca para cada fibra* p *de* $\mathbf{V}_0$. *Além disso, existe uma adjunção de Quillen*

$$\mathbf{S}\text{-}\mathit{Preshv}(\mathbf{V}) \rightleftarrows \mathbf{S}\text{-}\mathit{Preshv}(\mathbf{V}_0).$$

Designa-se por $\mathbf{T}_0$ a subcategoria de espaços topológicas X com $X \subseteq \mathbb{R}^n$ fechado para algum inteiro n não-negativo e localmente contráctil, munida com a topologia de homeomorfismos locais. A categoria $\mathbf{T}_0$ possui uma enriquecimenta sobre $\mathbf{S}_0$ da forma: Para $X, Y \in \mathbf{T}_0$, seja $\mathrm{map}(X,Y)_n = \mathrm{Hom}(X \times \Delta^n_{\mathrm{top}}, Y)$, em que $\Delta^n_{\mathrm{top}} = \{(t_0, \ldots, t_n) \mid 0 \le t_i \le 1, \sum t_i = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Designa-se por $\mathbf{T}$ a categoria simplicial munida com os complexos de aplicações acima.

Teorema 2. *A categoria* $\mathbf{S}$-*Preshv*$(\mathbf{T})$ *possui uma estrutura de uma categoria modelo de Quillen em que as cofibrações são aplicações injectivos e as equivalências fracas são aplicações* $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ *tais que* f_p *é uma equivalência fraca para cada fibra* p *de* $\mathbf{T}_0$. *Além disso, existe uma equivalência de Quillen*

$$\mathbf{S}\text{-}\mathit{Preshv}(\mathbf{T}) \rightleftarrows \mathbf{S}.$$

O functor de pontos geométricos $\mathbf{V} \to \mathbf{T}$ é dado por $X \mapsto X(\mathbb{C})$, em que $X(\mathbb{C})$ é o conjunto de $\mathbb{C}$-pontos de X munido com a topologia clássica, induz o functor de realização $\mathbf{S}$-*Preshv*$(\mathbf{V}) \to \mathbf{S}$-*Preshv*$(\mathbf{T})$, e obtemos

Teorema 3. *O functor de realização induz um functor de categorias de homotopia*

$$\mathbf{HoS}\text{-}\mathit{Preshv}(\mathbf{V}) \to \mathbf{HoS}\text{-}\mathit{Preshv}(\mathbf{T})$$

Usando o functor de realização obtemos

Corolário 1. *A realização-$\mathbb{A}^1$ é dada por*

$$\mathbf{HoS}\text{-}Preshv(\mathbf{V}_0) \to \mathbf{HoS}\text{-}Preshv(\mathbf{V}) \to \mathbf{HoS}\text{-}Preshv(\mathbf{T}) \to \mathbf{HoS}$$

Referências

[1] Fabien Morel, Vladimir Voevodsky. $\mathbf{A}^1$-*homotopy theory of schemes*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., 1999, ISSN 0073-8301, **90**, 45– 143 (2001)

INVOLUÇÕES EM SUPERFÍCIES COM $p_g = q = 1$

Carlos Rito

Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro

Resumo

As superfícies algébricas de tipo geral com $p_g = q = 1$ não estão ainda classificadas, e poucos exemplos são conhecidos.

Uma superfície S é uma cobertura dupla de uma superfície X se existe um morfismo de grau 2 $\phi : S \to X$. Os invariantes de S são determinados pelo divisor de ramificação de ϕ. Coberturas duplas têm sido eficazmente utilizadas na obtenção de exemplos novos.

Se uma superfície S tem uma involução i (automorfismo de ordem 2), então S é uma cobertura dupla de S/i, dada pela projecção $S \to S/i$. Nesta palestra vamos falar na classificação de superfícies de tipo geral com $p_g = q = 1$ que têm uma involução. Vamos também ver como obter vários exemplos novos. Em alguns casos utilizamos o Sistema Computacional Algébrico Magma para construir curvas de ramificação com singularidades complicadas.

Coberturas ramificadas sobre enlaces

António Salgueiro

CMUC, Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Resumo

Sejam M, M' variedades tridimensionais compactas orientáveis e L' um enlace em M'. São dadas condições sob as quais uma cobertura $p : M \to M'$ ramificada ao longo de L' tem um grau único.

Instantons on connected sums: the large rank limit.

João Paulo Santos

Instituto Superior Técnico

Abstract

An $SU(r)$ instanton with charge k is a connection on an $SU(r)$ bundle E over a 4 manifold with second Chern class $c_2(E) = k$, whose curvature is self dual with respect to the Hodge $*$ operator.

An instanton on a connected sum $X\#Y$ can be obtained by gluing together connections on X and Y. Since $S^4\#S^4 \cong S^4$ we get a multiplication on the moduli space $\mathfrak{M}(S^4)$ of instantons on S^4. In the large rank limit $\mathfrak{M}(S^4)$ is homotopy equivalent to the disjoint union $\coprod BU(k)$ and the multiplication is given by Whitney sum.

The isomorphism $S^4\#X \cong X$ induces an "action" of $\mathfrak{M}(S^4)$ on $\mathfrak{M}(X)$. Thus we can form the bar construction $B(X,Y) = Bar(\mathfrak{M}(X), \mathfrak{M}(S^4), \mathfrak{M}(Y))$ which we can think of as the homotopy version of "$\mathfrak{M}(X) \times_{\mathfrak{M}(S^4)} \mathfrak{M}(Y)$".

Gluing of connections induces a map $h : B(X,Y) \to \mathfrak{M}(X\#Y)$. In the large rank limit and when X, Y are simply connected and positive definite, h a homotopy equivalence for charges $k = 1, 2$.

A model for equivariant Eilenberg-Mac Lane spectra

Pedro F. dos Santos

Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico

Abstract

Given a ring A there is a geometric construction of the space that classifies the cohomology functor $H^n(-; A)$; it is just the the free A-module $S^n \otimes A$ generated by the space S^n. For spaces with an action of finite group G, the role of cohomology with coefficients in a ring is played by equivariant cohomology with coefficients in an appropriate algebraic object M – called a Mackey functor. In this talk we will describe a geometric construction for the classifying spaces of equivariant cohomology with coefficients in a Mackey functor M. This is joint work will Zhaohu Nie.