

Encontro Nacional da Sociedade Portuguesa de Matemática  
25 a 28 de Junho de 2008

ISEC

Optimização e Investigação Operacional

Org. Domingos Moreira Cardoso

26 de Junho, 5<sup>a</sup> feira, 11h-12h30

- Pedro Martins: *Cliques em grafos: algumas aplicações práticas*
- Luís A. Vieira: *Equações em diferenças finitas homogéneas de segunda ordem e o espectro de uma família de grafos fortemente regulares*
- Isabel Martins: *Uma abordagem em programação inteira para problemas de gestão de florestas para produção de madeira com restrições ambientais*

27 de Junho, 6<sup>a</sup> feira, 11h-12h30m

- Domingos M. Cardoso: *Conjuntos parcialmente ordenados, polinómios cromáticos e Sudoku*
- Agostinho Agra: *Formulações estendidas para o problema do saco mochila*
- Cristina Requejo: *Árvores no desenho de redes de telecomunicações*

27 de Junho, 6<sup>a</sup> feira, 14h-15h30m

- Marta Pascoal: *Do caminho mais curto ao caminho mais curto por unidade de tempo*
- Isabel C. Lopes e J. Valério de Carvalho: *O problema de minimização do número de pilhas abertas*
- Aldina Correia, João Matias, Pedro Mestre e Carlos Serôdio: *Métodos de pesquisa directa para optimização não linear*

28 de Junho, Sábado, 11h-12h30

- Maria João Alves: *O problema de optimização de dois níveis linear multi-objectivo*
- Fernanda A. Ferreira, Flávio Ferreira e Alberto A. Pinto: *Vantagens e desvantagens de ser líder*
- Fernanda A. Ferreira e Flávio Ferreira: *Decisão endógena de ser ou não líder quando há incerteza na procura*

# FORMULAÇÕES ESTENDIDAS PARA O PROBLEMA SACO-MOCHILA

**Agostinho Agra**

Departamento de Matemática e CEOC da Universidade de Aveiro

## **Resumo**

Será recordada a formulação clássica do problema do saco-mochila como um problema do caminho mais curto. Por projecção desta formulação é obtida uma nova formulação estendida para o problema do saco-mochila. Será discutida a relação entre as variáveis das duas formulações.

# O PROBLEMA DE OPTIMIZAÇÃO DE DOIS NÍVEIS LINEAR MULTI-OBJECTIVO

**Maria João Alves<sup>(a)</sup> e Joaquim J. Júdice<sup>(b)</sup>**

<sup>(a)</sup>Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra e INESCC

<sup>(b)</sup>Universidade de Coimbra e Instituto de Telecomunicações

## Resumo

Um problema de optimização de dois níveis caracteriza-se pela existência de uma relação hierárquica entre dois tipos de agentes de decisão, de níveis superior e inferior. Cada agente de decisão controla um grupo diferente de variáveis, sujeito a restrições, e procura optimizar uma dada função objectivo. Trata-se de um processo sequencial, em que o líder (agente de decisão de nível superior) estabelece primeiro os níveis das suas actividades, mas incorpora no processo de decisão a reacção do agente de decisão de nível inferior. A formulação do problema integra dois programas matemáticos em que um deles faz parte das restrições do outro. No caso de existirem múltiplas funções objectivo em algum dos níveis, então o problema é ainda multi-objectivo.

Nesta comunicação é estudado o problema de optimização de dois níveis linear (em que todos os objectivos e restrições são definidos por funções lineares) com múltiplos objectivos no nível superior e uma única função no nível inferior. São primeiramente discutidas as características deste problema para posteriormente ser introduzida uma abordagem metodológica interactiva baseada em pontos de referência para programação inteira multi-objectivo, e exemplificada a sua utilização em problemas de dois níveis multi-objectivo.

# MÉTODOS DE PESQUISA DIRECTA PARA OPTIMIZAÇÃO NÃO LINEAR

**Aldina Correia<sup>(a)</sup>, João Matias<sup>(b)</sup>, Pedro Mestre<sup>(c)</sup>, Carlos Serôdio<sup>(c)</sup>**

<sup>(a)</sup>Escola Superior de Estudos Industriais e de Gestão - Instituto Politécnico do Porto

<sup>(b)</sup>Departamento de Matemática, Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro

<sup>(c)</sup>Centro de Estudos Tecnológicos do Ambiente e da Vida (CETAV), Departamento de Engenharias, Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro

## Resumo

A modelação matemática, nomeadamente a optimização, tem sido utilizada para o estudo e compreensão de muitos problemas e fenómenos reais, na engenharia, economia, medicina, entre outras.

Os problemas de optimização são abundantes, havendo a necessidade de determinar soluções que correspondam o melhor possível à realidade.

As técnicas ou estratégias utilizadas em cada método dependem da quantidade de informação disponível, e passível de ser utilizada, da maior ou menor eficiência e robustez do algoritmo a utilizar, da facilidade de implementação, e, obviamente, das especificidades do próprio problema.

Com base na informação disponível ou pretensamente utilizável, existem duas classes de métodos de optimização sem restrições. Uma é a classe dos métodos dos gradientes que inclui os métodos que utilizam derivadas nomeadamente as de primeira e segunda ordem. A outra classe de métodos, os Métodos de Pesquisa Directa apenas utilizam nos seus algoritmos informação relativa ao valor da função objectivo,  $f$ , progredindo em direcção ao mínimo com base na comparação dos valores de  $f$  em diversos pontos.

A função objectivo é, muitas vezes, por exemplo, resultado de medições físicas, químicas ou económicas e portanto não se conhece a sua expressão analítica nem a das suas derivadas, ou é complexa e o cálculo das derivadas é muito difícil ou são mesmo inexistentes em pontos de interesse, pode demorar muito tempo ou requerer a resolução de outros problemas para o seu cálculo. Essas funções são encontradas frequentemente em problemas reais e o resultado disto é uma forte insistência dos especialistas para encontrar algoritmos e software que sirvam de ferramentas para os resolver.

Nestes casos torna-se essencial utilizar métodos de optimização em que o cálculo, ou a verificação da existência, das derivadas não seja necessário: os Métodos Iterativos de Optimização sem Utilização de Derivadas ou Métodos de Pesquisa Directa.

Estes métodos também podem ser utilizados quando as derivadas da função apresentam descontinuidades em pontos na vizinhança do mínimo, quando as derivadas não existem numa vizinhança do mínimo, quando são difíceis de calcular ou quando exigem um grande esforço computacional.

Métodos deste tipo são os Métodos de Pesquisa em Padrão e os Métodos Simplex. A popularidade e o interesse por estes métodos deve-se à sua simplicidade de implementação e ao facto de funcionarem bem para uma grande diversidade de problemas.

Esta comunicação pretende apresentar uma breve descrição dos Métodos de Pesquisa em Padrão e dos Métodos Simplex e são apresentados resultados numéricos no sentido de mostrar a aplicabilidade dos algoritmos a problemas práticos e comparar o comportamento dos dois métodos. A implementação dos métodos foi realizada em Linguagem Java.

# CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS, POLINÓMIOS CROMÁTICOS E SUDOKU

**Domingos Moreira Cardoso**

Universidade de Aveiro - Departamento de Matemática

CEOC - Centro de Estudos em Optimização e Controlo

## Resumo

Dado um grafo simples  $G$ , com  $n$  vértices, uma *coloração parcial* de  $G$  é uma coloração própria de um subconjunto de vértices  $W$ ,  $c: W \rightarrow \{1, \dots, k\}$ , onde para cada par de vértices  $i, j \in W$  ligados por uma aresta,  $c(i) \neq c(j)$ . A atribuição de cores aos restantes vértices, de modo a obter-se uma coloração própria para todo o grafo  $G$ , designa-se por *extensão cromática* de  $c$ . A partir de uma coloração parcial,  $c$ , define-se o conjunto das  *$c$ -contracções*,  $\mathcal{G}_c$ , como sendo o conjunto de grafos obtidos de  $G$  a partir da contracção de zero ou mais arestas com no máximo um extremo em  $W$ . Denotando a correspondente relação de contracção por  $\preceq_c$ , conclui-se que  $C = (\mathcal{G}_c, \preceq_c)$  é um conjunto parcialmente ordenado. Nesta apresentação, sendo  $f_c(G, \lambda)$  o número de extensões cromáticas de  $c$ , utilizando  $\lambda \geq k$  cores, demonstra-se (com recurso à inversão de Möbius) que  $f_c(G, \lambda)$  é um polinómio em  $\lambda$ , mónico, de grau  $n - |W|$ , com coeficientes inteiros. Adicionalmente, exemplifica-se a determinação de polinómios de extensões cromáticas e aplicam-se os resultados obtidos a problemas associados ao popular puzzle Sudoku e à determinação de polinómios cromáticos de grafos.

# VANTAGENS E DESVANTAGENS DE SER LÍDER

Fernanda A. Ferreira<sup>(a)</sup>, Flávio Ferreira<sup>(a)</sup> e Alberto A. Pinto<sup>(b)</sup>

<sup>(a)</sup>Centro de Matemática da Universidade do Porto e ESEIG, Instituto Politécnico do Porto

<sup>(b)</sup>Departamento de Matemática, Universidade do Minho

## Resumo

O modelo introduzido por Stackelberg [4] é um dos mais largamente utilizados em Organização Industrial, na análise do comportamento das empresas em mercados competitivos. Este modelo estuda as possíveis estratégias quando as empresas decidem sequencialmente as respectivas quantidades a produzir para o mercado. Liu [3] analisou a questão de saber se existe, de facto, vantagem para a empresa que decide primeiro (líder), considerando incerteza na procura.

Neste trabalho estendemos o estudo realizado por Liu atendendo não só ao efeito da incerteza da procura, mas também à diferenciação dos produtos para explicar as vantagens e desvantagens de ser líder. Consideramos um modelo de duopólio em que apenas a empresa líder enfrenta incerteza na procura. A incerteza na procura é dada por uma variável aleatória uniformemente distribuída, com média  $\mu$  e desvio padrão  $\sigma$  que caracterizam o parâmetro  $\theta = (\mu + \sqrt{3}\sigma)/(\mu - \sqrt{3}\sigma)$  da incerteza na procura. No momento em que a empresa seguidora decide a quantidade que vai produzir essa incerteza está resolvida. Deste modo, a empresa líder possui vantagem de liderança, mas a empresa seguidora goza de uma vantagem de informação, pois pode ajustar o seu nível de produção após observar a realização da procura (flexibilidade). Estudamos as vantagens de flexibilidade sobre liderança com as variações do parâmetro  $0 < \gamma \leq 1$  que representa o grau de diferenciação dos produtos comercializados. Encontramos funções  $I_\gamma$  e  $J_\gamma$ , definidas explicitamente em termos do parâmetro  $\gamma$ , que caracterizam o parâmetro  $\theta$  da incerteza na procura, para o qual a empresa líder perde a sua vantagem, para determinadas realizações da variável aleatória da procura. Em [1] e [2], mostramos que (i) quando a incerteza é baixa, a empresa líder preserva a sua vantagem; (ii) quando a incerteza é elevada, a empresa líder preserva a sua vantagem apenas para valores intermédios da realização da procura; e (iii) para valores intermédios de incerteza, a empresa líder preserva a sua vantagem apenas para valores baixos da realização da procura.

Fazemos uma análise *ex-ante*, calculando os lucros esperados de ambas as empresas, em termos do parâmetro  $\theta$  da incerteza na procura e do parâmetro  $\gamma$  da diferenciação dos produtos. Calculamos também, em termos do parâmetro da incerteza na procura e do parâmetro da diferenciação dos produtos, a probabilidade da segunda empresa obter lucros superiores aos da empresa líder.

## Referências

- [1] F.A. Ferreira, F. Ferreira and A.A. Pinto. *'Own' price influences in a Stackelberg leadership with demand uncertainty*. Brazilian Journal of Business Economics. (Aceite para publicação no Volume 8, Número 2, 2008). pp. 1-18, 2008.
- [2] F.A. Ferreira, F. Ferreira and A.A. Pinto. *Flexibility in Stackelberg leadership*. In Bela Patkai et al. (Eds.): Intelligent Engineering Systems and Computational Cybernetics. Springer-Verlag book (In press) pp. 1-8, 2007.

- [3] Z. Liu. *Stackelberg leadership with demand uncertainty*. Managerial and Decision Economics, 26, 345-350, 2005.
- [4] H. von Stackelberg. *Marktform und Gleichgewicht*. Julius Springer: Vienna; 1934.

# DECISÃO ENDÓGENA DE SER OU NÃO LÍDER QUANDO HÁ INCERTEZA NA PROCURA

**Fernanda A. Ferreira e Flávio Ferreira**

Centro de Matemática da Universidade do Porto e ESEIG, Instituto Politécnico do Porto

## Resumo

Marshall [2] observou que os ajustes nas quantidades de produção levam mais tempo do que os ajustes nos preços. Em muitas indústrias, a produção de bens ou o fornecimento de serviços pode demorar um longo período de tempo. Assim, as empresas têm, muitas vezes, necessidade de tomar decisões, com alguma antecedência, sobre as quantidades a produzir. Esta decisão antecipada no tempo pode, como é do conhecimento geral, levar a dois efeitos. Um é um efeito estratégico: se uma empresa decide a quantidade que vai produzir antes de outra, a primeira empresa pode garantir a vantagem de liderança, como acontece no modelo de Stackelberg. O outro efeito surge quando existe incerteza na procura. Contrariamente ao efeito estratégico, uma empresa pode obter uma vantagem adicional se decidir esperar até que a procura seja conhecida.

Hirokawa and Sasaki [1] realizaram esta análise entre decidir mais cedo ou mais tarde os níveis de produção, fixando à partida o número de empresas concorrentes. Nomeadamente, assumindo a priori  $n$  empresas idênticas, os referidos autores determinaram o número em equilíbrio de empresas que, simultaneamente, devem assumir a posição de líderes - co-líderes. Esse número é dado em função da incerteza da procura. Neste trabalho, estudamos o mesmo problema, considerando uma função de procura mais geral. Também calculamos as quantidades a produzir por cada uma das empresas co-líderes e por cada uma das seguidoras, bem como os lucros respectivos.

## Referências

- [1] M. Hirokawa and D. Sasaki. Endogenous co-leadership when demand is uncertain. *Australian Economic Papers* 2: 279-290, 2000.
- [2] A. Marshall. *Principles of Economics*. London, McMillan, 1920.

# O PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO DO NÚMERO DE PILHAS ABERTAS

Isabel Cristina Lopes<sup>(a)</sup> e José Valério de Carvalho<sup>(b)</sup>

<sup>(a)</sup>ESEIG - Politécnico do Porto

<sup>(b)</sup>Escola de Engenharia da Universidade do Minho

## Resumo

O problema abordado nesta comunicação surge em vários contextos, tais como as indústrias de corte (tubos de aço, papel, vidros planos, painéis de madeira,...), o planeamento de tarefas, ou mesmo o design de circuitos VLSI (Very Large Scale Integration).

No contexto das indústrias de corte de stock, considera-se uma máquina que apenas processa um padrão de corte de cada vez, em que os itens já cortados que forem do mesmo tamanho são empilhados juntos perto da máquina. Cada uma destas pilhas só é fechada e retirada da zona de trabalho depois de todos os itens desse tipo terem sido cortados, logo por questões de limitação de espaço e custos de manuseamento das peças interessa manter junto da máquina de corte apenas o menor número de pilhas abertas possível. Para tal, procura-se otimizar a sequência de processamento dos padrões de corte.

Este problema é conhecido na literatura como MOSP (Minimization of Open Stacks Problem) e é um problema NP-difícil. É possível construir diversos modelos para este problema. As soluções que têm vindo a ser encontradas recorrem usualmente a branch-and-bound e a heurísticas variadas. Nesta comunicação serão explicados alguns modelos para este problema baseados em programação linear inteira e conceitos de teoria de grafos.

# UMA ABORDAGEM EM PROGRAMAÇÃO INTEIRA PARA PROBLEMAS DE GESTÃO DE FLORESTAS PARA PRODUÇÃO DE MADEIRA COM RESTRIÇÕES AMBIENTAIS

**Isabel Martins<sup>(a)</sup>, Filipe Alvelos<sup>(b)</sup> e Miguel Constantino<sup>(c)</sup>**

<sup>(a)</sup>Centro de Investigação Operacional, Departamento de Matemática, Instituto Superior de Agronomia

<sup>(b)</sup>Centro Algoritmi, Departamento de Produção e Sistemas, Universidade do Minho

<sup>(c)</sup>Centro de Investigação Operacional, Departamento de Estatística e Investigação Operacional, Universidade de Lisboa

## Resumo

Os interesses mais recentes pela qualidade do ambiente, por exemplo, da vida selvagem, do solo, da água e da beleza natural, adicionaram condições espaciais à gestão das florestas para produção de madeira. Uma condição espacial bem conhecida requer que as áreas das clareiras resultantes do corte raso das árvores não sejam superiores a um dado valor.

A abordagem de modelação mais recente para limitar as áreas das clareiras no escalonamento do corte raso - area restriction model (ARM) - permite o corte em duas unidades de gestão adjacentes. Em comparação com a abordagem clássica, o ARM melhora significativamente a qualidade das soluções de gestão, dada a sua grande flexibilidade. No entanto, é bastante mais difícil de resolver porque é mais combinatório.

Nesta apresentação, descreve-se uma abordagem exacta em programação inteira para o ARM. Apresentam-se testes computacionais com florestas reais e hipotéticas.

# CLIQES EM GRAFOS: ALGUMAS APLICAÇÕES PRÁTICAS

**Pedro Martins**

ISCAC - Instituto Politécnico de Coimbra

Centro de Investigação Operacional(CIO) - FC/UL

## **Resumo**

Vários problemas de optimização em grafos têm sido utilizados no estudo e resolução de problemas nas áreas da Engenharia, Economia, Gestão, Biologia, Química, etc. Esta participação, quase sempre com resultados práticos de grande interesse, tem contribuído de forma significativa para o desenvolvimento do conhecimento nessas áreas, recompensando assim os esforços de muitos investigadores que se concentram na teoria de grafos e na optimização.

Nesta comunicação damos maior atenção à identificação e optimização de cliques num grafo, evidenciando propriedades, formulações e algumas técnicas de resolução referidas na literatura. Estes problemas têm participado em desenvolvimentos recentes nas áreas da genómica e da proteómica. Sabendo que muitos destes problemas da teoria de grafos pertencem à classe dos NP-difíceis, nomeadamente o problema da clique máxima, o interesse prático que eles potenciam justifica cada vez mais o trabalho teórico que muitos investigadores lhe concentram. Nesta comunicação procuraremos evidenciar esse potencial.

# DO CAMINHO MAIS CURTO AO CAMINHO MAIS CURTO POR UNIDADE DE TEMPO

**Marta M. B. Pascoal**

Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra

Instituto de Engenharia de Sistemas e Computadores – Coimbra

## **Resumo**

Determinar o melhor caminho entre dois pontos de uma rede é um problema com aplicação em diversas áreas, que tem sido intensivamente estudado para algumas funções objectivo. No problema do caminho mais curto (PCMC), a variante mais conhecida, a função objectivo é linear e representa a distância, enquanto que no problema do caminho mais curto por unidade de tempo (PCMCUT), bastante menos estudado do que o anterior, a função objectivo é linear fraccionária e representa o quociente entre a distância e o tempo. Nesta apresentação revêem-se o princípio de optimalidade e o algoritmo de rotulação, que permite resolver o PCMC. Em seguida mostra-se que um processo semelhante não permite resolver o PCMCUT e discutem-se duas técnicas para abordar o PCMCUT, uma através de um algoritmo paramétrico utilizado em programação fraccionária e outra resultante da extensão do algoritmo de rotulação de modo a contemplar distância e tempo.

# ÁRVORES NO DESENHO DE REDES DE TELECOMUNICAÇÕES

**Cristina Requejo**

Departamento de Matemática e CEOC, Universidade de Aveiro

## **Resumo**

A topologia de uma rede refere-se ao modo como os elementos da rede são interligados. Uma das topologias mais comum é a topologia em árvore. Nesta apresentação descreveremos alguns problemas de árvores, com restrições adicionais, que ocorrem em situações de desenho de redes de telecomunicações. Algumas formulações de problemas de árvores com restrições adicionais e técnicas de resolução serão alguns dos temas abordados.

# EQUAÇÕES EM DIFERENÇAS FINITAS HOMOGÊNEAS DE SEGUNDA ORDEM E O ESPECTRO DE UMA FAMÍLIA DE GRAFOS FORTEMENTE REGULARES

**Luís A. Vieira**

CMUP e Faculdade de Engenharia do Porto

Departamento de Engenharia Civil, Secção de Matemática e Física

## Resumo

Seja  $n$  um número natural e  $m = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ . Consideram-se  $m$  equações em diferenças finitas homogêneas de segunda ordem da forma

$$\beta_{(k+2)i} - a_i \beta_{(k+1)i} + \beta_{ki} = 0$$

para  $i = 1, \dots, m$ , onde  $a_i = 2 \cos(\frac{2\pi(i-1)}{n})$ . Destas  $m$  equações obtemos a tabela de caracteres de uma Álgebra de Jordan Euclidiana  $m$ -dimensional  $\mathcal{V}_n$  de matrizes simétricas de ordem  $n$  relativamente a duas bases  $\mathcal{B}_1$  e  $\mathcal{B}_2$  de  $\mathcal{V}_n$ , onde cada elemento de  $\mathcal{B}_1$  é a matriz de adjacência de um grafo regular. Em seguida determina-se o espectro de famílias de grafos fortemente regulares cujas matrizes de adjacência pertencem a  $\mathcal{V}_n$ . Apresentam-se alguns exemplos numéricos.

## Referências

- [1] Cardoso, D. M. and Vieira, L. *Euclidean Jordan Algebras with Strongly regular graphs*. Journal of Mathematical Sciences, 120 (2004) :881-894.
- [2] Faraut, J. and Korányi, A. *Analysis on Symmetric Cones*. Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, Oxford, 1994.
- [3] Elaydi, S. N. *An introduction to Difference Equations*, Springer-Verlag, New York, (1960).