Encontro Nacional da Sociedade Portuguesa de Matemática
25 a 28 de Junho de 2008
ISEC

Sistemas Dinâmicos

Org. José Ferreira Alves

27 de Junho, 6ª feira, 11h-12h30m

- Rui Castanheira de Paiva: *Hopf Bifurcation in Coupled Cell Networks with Interior Symmetries*
- Mike Todd: *Return time statistics and Extreme Value Theory for interval maps*
- Eliana Manuel Pinho: *Padrões Espaciais em Reticulados de Sistemas Dinâmicos*

27 de Junho, 6ª feira, 14h-15h30m

- Fátima Pina: *Rolamentos e Não Holonomia da Esfera* $\mathbf{S}^n$
- Flávio Ferreira: *Hausdorff dimension bounds for smoothness of holonomies for codimension* 1 *hyperbolic dynamics*
- Roman Chertovskih: *Bifurcations in the convective dynamo problem*

28 de Junho, Sábado, 11h-12h30

- João Lopes-Dias: *Renormalization of quasiperiodically forced circle flows*
- Mário Bessa: *Muitos pontos elípticos em fluxos incompressíveis*
- João Paulo Almeida: *Ladrilhamentos Dourados da Recta Real*

LADRILHAMENTOS DOURADOS DA RECTA REAL

A. Pinto[(a)], **J. P. Almeida**[(b)], **A. Portela**[(c)]
[(a)]Universidade do Minho
[(b)]CMAT-FCT da Universidade do Minho, Instituto Politécnico Bragança
[(c)]Universidade de Montevideo

Resumo

Apresentaremos a definição de sucessão dourada $\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Estas sucessões possuem a propriedade de serem *Fibonacci quasi-periodicas* e determinam um ladrilhamento na recta real. Provaremos uma correspondência bijectiva entre:

(i) sucessões douradas;

(ii) classes de conjugação diferenciáveis de difeomorfismos de Anosov na classe de conjugação topológica do automorfismo hiperbólico do toro

$$G_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

(iii) classes de conjugação diferenciáveis de difeomorfismos da circunferência com número de rotação igual ao inverso do número de ouro, $\Phi = (1+\sqrt{5})/2$, e que são pontos fixos do operador renormalização.

References

[1] A. A. Pinto, J. P. Almeida, A. Portela. *Golden tilings.* Submitted.

[2] A. A. Pinto, D. Rand and F. Ferreira. *Fine Structures of Hyperbolic Diffeomorphisms.* To be published as Springer Monograph, (2007).

[3] A. A. Pinto, D. Rand. *Solenoid functions for hyperbolic sets on surfaces.* Recent Progress in Dynamics. MSRI Publications, **54**, 145-178, (2007).

[4] A. A. Pinto, D. Rand. *Smoothness of holonomies for codimension 1 hyperbolic dynamics.* Bull. London Math. Soc. **34**, 341-352, (2002).

[5] A. A. Pinto, D. Rand. *Rigidity of hyperbolic sets on surfaces.* J. London Math. Soc. **2**, 1-22, (2004).

[6] A. A. Pinto, D. Sullivan. *The circle and the solenoid.* Dedicated to A. Katok on the occasion of his 60th birthday, DCDS-A, **16** (2), 463-504, (2006).

Muitos pontos elípticos em fluxos incompressíveis

Mário Bessa

CMUP e IPC - ESTGOH

Resumo

Consideramos uma variedade M tridimensional, suave, compacta, conexa, sem bordo e com estrutura Riemanniana. Consideramos também o conjunto K dos fluxos incompressíveis de classe C1 nela definidos. Provamos que existe um subconjunto residual em K tal que, qualquer fluxo em K, ou é Anosov (totalmente hiperbólico) ou então tem pontos elípticos densos em M. Este resultado segue de um trabalho conjunto com Pedro Duarte (FCUL) [1]. Recordamos que o nosso resultado é a versão a tempo contínuo dum teorema já com 30 anos de Newhouse [2].

References

[1] M. Bessa e P. Duarte. *Abundance of elliptic dynamics on conservative three-flows.* Preprint arXiv:0709.0700 (2007) to appear in Dynamical Systems - An International Journal.

[2] S. Newhouse. *Quasi-elliptic periodic points in conservative dynamical systems.* Am. J. Math., 99 (1977), 1061–1087.

Bifurcations in the convective dynamo problem

R. Chertovskih[a,b], **S. Gama**[a], **O. Podvigina**[b], **V. Zheligovsky**[b]
[a]Departement of Applied Mathematics, University of Porto
[b]International Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Moscow

Abstract

We study magnetic field generation in a plane layer of Bouissinesq fluid rotating about a vertical axis by simulating convective hydromagnetic attractors and identifying bifurcations occurring in the system for rotation rates varying from zero up to the values large enough to halt the flow. The symmetry group of the convective magnetohydrodynamic (MHD) system is used for classification of attractors and bifurcations.

The flow satisfies the three-dimensional Navier-Stokes equation involving the buoyancy, Coriolis and Lorentz forces. The standard temperature and magnetic induction equations are assumed [1]. Electrically isolating stress-free horizontal boundaries held at fixed temperature are considered. Periodicity in horizontal directions with the same period L (measured in the units of the layer width) along the horizontal Cartesian axes is assumed. In the dimensionless form the system is characterized by the following parameters: the Rayleigh number, Ra (measuring the amplitude of buoyancy forces); the Prandtl number, Pr (the ratio of kinematic viscosity to thermal diffusivity); the magnetic Prandtl number, Pm (the ratio of kinematic viscosity to magnetic diffusivity); the Taylor number, Ta (measuring the rate of rotation).

The symmetry group of the convective hydromagnetic system is $\mathbf{Z}_4 \times T^2 \times \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$, where $\mathbf{Z}_4$ is generated by rotation by $\pi/2$ about the vertical axis, the subgroups T are translations in horizontal directions, one $\mathbf{Z}_2$ is reflection about the horizontal midplane and the other one stems from magnetic field reversal.

The non-rotating system for the parameter values under consideration ($Ra = 2300$, $Pr = 1$, $Pm = 8$ and $L = 2\sqrt{2}$) has a single MHD attractor [2], a quasi-periodic travelling wave with two basic temporal frequencies. More than twenty bifurcations occur in the system on increasing the rotation rate (from $Ta = 0$ up to $Ta = 2000$), including saddle-node, pitchfork and Hopf bifurcations, and Hopf bifurcations of periodic orbits; the attractors are steady states, periodic orbits and tori. An interesting observed feature is coexistence of up to three types of attractors (not related by symmetries) for some values of the Taylor number. A window of rotation rates where magnetic field generation fails has been found.

The work of RC is supported by the Fundação para a Ciência e a Tecnologia under the grant SFRH/BD/23161/2005.

References

[1] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability.* Oxford, 1961.

[2] O.M. Podvigina. Eur. Phys. J. B **50**, 639–652, 2006.

Hausdorff dimension bounds for smoothness of holonomies for codimension 1 hyperbolic dynamics

Alberto A. Pinto[(a)], **David A. Rand**[(b)] **and Flávio Ferreira**[(c)]
[(a)] Departamento de Matemática, Universidade do Minho
[(b)] Mathematics Institute, University of Warwick
[(c)] CMUP and ESEIG, Instituto Politécnico do Porto

Abstract

In [3], we introduce the notion of a twinned pair of leaves for a diffeomorphism f of a surface with a basic set Λ. We prove that every proper codimension 1 attractor Λ contains a twinned pair of leaves. The relevance of the existence of a twinned pair of leaves is that these basic sets do not have affine models, i.e an affine set of charts that cover Λ and in which f and the holonomies are affine. Hence, if Λ is a proper codimension 1 attractor then there are no affine models for f on Λ.

In [2], it is proved that the stable and unstable holonomies of a basic set Λ are $C^{1+\alpha}$ local diffeomorphisms, for some $\alpha(f) > 0$. In [3], we prove the existence of an upper bound on the degree of smoothness for the holonomies of a basic set Λ, for a diffeomorphism f, with a twinned pair of leaves. To prove this result, rather than consider all holonomies, it is enough to consider a complete set of holonomies as introduced in [1]. As a corollary, we obtain that for a proper codimension 1 attractor Λ, the stable holonomies do not have $C^{1+\alpha}$ extensions for $\alpha > HD^s$, where HD^s is the Hausdorff dimension of the stable leaves intersected with the attractor Λ.

References

[1] A.A. Pinto, D.A. Rand. *Rigidity of hyperbolic sets surfaces*. Journal London Math. Soc. **71**, 2, 481-502, 2004.

[2] A.A. Pinto, D.A. Rand. *Smoothness of holonomies for codimension 1 hyperbolic dynamics*. Bull. London Math. Soc. **34** 341-352, 2002.

[3] A.A.Pinto, D.A. Rand, F. Ferreira. *Hausdorff dimension bounds for smoothness of holonomies for codimension* 1 *hyperbolic dynamics*. J. Differential Equations **243**, 2, 168-178, 2007.

Rolamentos e Não Holonomia da Esfera $\mathbf{S}^n$

Fátima Pina, Fátima Silva Leite[1]

Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra

Resumo

Se duas variedades diferenciáveis com a mesma dimensão estão mergulhadas no mesmo espaço Euclidiano e uma rola sobre a outra, sem deslizar nem torcer, ao longo de uma curva de contacto, então estamos em presença do movimento de um corpo rígido, sujeito a várias restrições. Portanto, o rolamento (sem deslize nem torção) de uma variedade sobre outra resulta da acção usual do grupo Euclidiano e é caracterizado pelas chamadas aplicações rolamento, descritas em detalhe em "R. Sharpe, Differential Geometry, Springer, New York, 1996".

Na nossa comunicação, iremos centrar-nos em rolamentos da esfera unitária S^n no espaço afim ao espaço tangente a S^n num ponto. O espaço de configuração deste sistema mecânico está contido no grupo Euclidiano especial $SE(n)$. O caso $n = 2$ está bem estudado na literatura, não só devido às suas múltiplas aplicações, mas também pela sua fácil visualização no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$ onde está mergulhada. Apesar da perda de intuição geométrica, quando se passa para dimensões superiores, rolamentos da esfera S^n têm sido objecto de estudo em anos mais recentes. O nosso ponto de partida é a definição de aplicação rolamento, contida no livro de R. Sharpe. Começaremos por interpretar esta definição e adaptá-la à nossa situação concreta, para em seguida deduzir as equações da cinemática para o rolamento da esfera S^n.

O termo não holonomia é usado desde o século dezanove para descrever a capacidade de um sistema mecânico, cujo movimento está sujeito a restrições nas velocidades, poder passar de uma configuração admissível para outra qualquer sem violar as restrições impostas. Em Teoria do Controlo, este conceito está relacionado com a propriedade de controlabilidade das correspondentes equações da cinemática do sistema. Tais restrições nas velocidades são também conhecidas por restrições não holónomas, por oposição a restrições holónomas que são apenas restrições nas configurações (ou estados).

A esfera rolante (que rola sobre um hiperplano sem deslizar nem torcer) pode ser vista como um sistema mecânico. As configurações deste sistema estão sujeitas a restrições holónomas, que correspondem à exigência de a esfera se manter tangente ao hiperplano ao longo do movimento. As restrições nas velocidades, que garantem que a esfera não vai torcer nem deslizar, são as restrições não holónomas e as equações da cinemática incorporam estas restrições nas velocidades.

Uma questão importante é saber se um dado sistema mecânico é não holónomo ou, de modo equivalente, se o sistema constituído pelas equações da cinemática é controlável. O problema da não holonomia da esfera rolante passa pela capacidade de se concretizar uma torção e um deslize, através de rolamentos sem torções nem deslizes.

Abordaremos a questão da não holonomia, provando que a esfera rolante é um sistema mecânico não holónomo e usando duas metodologias diferentes: uma prova teórica, baseada em condições necessárias e suficientes de controlabilidade das equações da cinemática, seguida de uma demonstração construtiva, mostrando como se podem reproduzir torções e deslizes apenas com rolamentos, sem deslize nem torção. O caso da esfera bidimensional servirá de inspiração ao caso geral.

[1] Trabalho desenvolvido no âmbito de Dissertação de Mestrado na Universidade de Coimbra

Renormalization of quasiperiodically forced circle flows

João Lopes-Dias[1]

Departamento de Matemática, ISEG, Universidade Técnica de Lisboa

Abstract

We construct a renormalization iterative scheme for fixed-point-free circle flows under a small diophantine quasiperiodic pertubation. The convergence of the renormalization leads to a proof that for real-analytic perturbations the system is analytically reducible, i.e. it is conjugated to a pure circle rotation flow.

[1] Joint work with Sasa Kocic.

Hopf Bifurcation in Coupled Cell Networks with Interior Symmetries

Rui C. Paiva [1]

Departamento de Matemática Pura, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Abstract

We consider an important class of non-symetric networks that lies between the class of general networks and the class of symmetric networks, where group theoretic methods still apply – namely, networks admitting "interior symmetries". The main result of this talk is the full analogue of the Equivariant Hopf Theorem for networks with symmetries. In [1] we extend the result of Golubitsky, Pivato and Stewart (Interior symmetry and local bifurcation in coupled cell networks, *Dynamical Systems* **19** (4) (2004) 389–407) to obtain states whose linearizations on certain subsets of cells, near bifurcation, are superpositions of synchronous states with states having spatio-temporal symmetries.

References

[1] F. Antoneli, A.P.S. Dias and R.C. Paiva. Hopf Bifurcation in Coupled Cell Networks with Interior Symmetries, *SIAM J. Appl. Dynam. Sys.* **7** (1) (2008) 220–248.

[2] M. Golubitsky, M. Pivato and I. Stewart. Interior symmetry and local bifurcation in coupled cell networks, *Dynamical Systems* **19** (4) (2004) 389–407.

[3] M. Golubitsky, I.N. Stewart and D.G. Schaeffer. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, vol. 2, Applied Mathematical Sciences **69**, Springer-Verlag, New York 1988.

[4] M. Golubitsky, I. Stewart and A. Török. Patterns of synchrony in coupled cell networks with multiple arrows, *SIAM J. Appl. Dynam. Sys.* **4** (1) (2005) 78–100.

[5] I. Stewart, M. Golubitsky and M. Pivato. Symmetry groupoids and patterns of synchrony in coupled cell networks, *SIAM J. Appl. Dynam. Sys.* **2** (4) (2003) 609–646.

[1] Centro de Matemática da Universidade do Porto, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Rua do Campo Alegre, 687, 4169-007 Porto, Portugal. CMUP is supported by FCT through POCTI and POSI of Quadro Comunitário de Apoio III (2000-2006) with FEDER and national fundings.

Padrões Espaciais em Reticulados de Sistemas Dinâmicos

Eliana Manuel Pinho[1]

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Resumo

Consideramos um número infinito de células idênticas dispostas num reticulado n-dimensional. Cada célula é um sistema de equações diferenciais ordinárias e está acoplada às células mais próximas, que são sistemas idênticos. Definimos assim um reticulado de equações diferenciais com uma arquitectura de acoplamento aos vizinhos mais próximos. Um padrão de sincronia é uma coloração das células associada a subespaços do espaço de fase total que são invariantes pelo fluxo e que dependem apenas da arquitectura da rede. Estas colorações são balanceadas — se duas células têm a mesma cor então a proporção das cores nas células suas vizinhas é a mesma para ambas.

Neste trabalho consideramos reticulados n-dimensionais, com uma arquitectura de acoplamento aos vizinhos mais próximos e com padrões de sincronia de k cores. Estabelecemos condições necessárias e suficientes para a existência de padrões de sincronia periódicos num reticulado, dada uma coloração balanceada de k cores. Estas condições estão relacionadas com a decomposição de redes finitas cujos acoplamentos são bidireccionais e cujas células estão coloridas com a mesma coloração balanceada. Usamos a teoria de redes de células acopladas, ferramentas algébricas e teoria de grafos.

[1] Trabalho conjunto com Ana Paula Dias

Return time statistics and Extreme Value Theory for interval maps

Mike Todd

Universidade do Porto

Abstract

This talk concerns two notions of recurrence for discrete time dynamical systems, one notion which has been mostly studied in the probabilistic setting, and one which has been studied both in that setting and also for dynamical systems.

Given a sequence of random variables $X_0, X_1, \ldots$, Extreme Value Theory is the study of the variable $M_n := \max\{X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}\}$ as n goes to infinity under some suitable scaling. For a dynamical system, the random variables are replaced by the values $\phi \circ f^k(x)$ for an observation ϕ and a typical point x. I will discuss joint work with A.C. and J.M. Freitas on Extreme Value Theory for multimodal interval maps.

Our results rely on the fact that there is a close link between Extreme Value Theory and the theory of return time statistics for interval maps with an absolutely continuous invariant measure (acip). In particular, if a system has exponential return time statistics then Extreme Value laws hold too. Return time statistics have been extensively studied for dynamical systems, and our results enable us to pass much of that theory into the Extreme Value setting. For example, this enables us to generalise Collet's work on Gumbel's Law, which he proved for Collet-Eckmann maps, to any multimodal map with an acip.